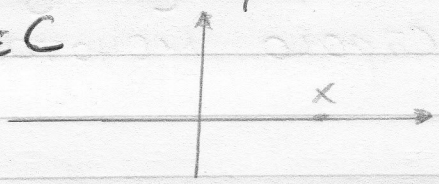
ДИС - Кирчев 13.10.12

Принцип на непрекъснатост

$A \subseteq \mathbb{R}$ ограничено отгоре

$x \in A, x \in C$



$C_1 \leq X$ - ограничено отдолу

$|x| \in C$ е еквивалентно на $-C \leq X \leq C$

Множество което е ограничено отгоре и отдолу

Всяко ограничено отгоре множество има точна горна граница

Монотонни редици

$a_1, a_2 \dots a_n \dots$

Монотонно растяща - ненамаляваща

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_n \leq \dots$

Монотонно намаляваща - нерастяща

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq a_n \geq \dots$

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$

строго монотонно растяща (растяща)

$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

строго монотонно намаляваща (намаляваща)

Всяка монотонно растяща редица, която е ограничена отгоре е растяща

Всяка монотонно намаляваща редица, която е ограничена отдолу е намаляваща

ℓ ; $\varepsilon > 0$ $\quad (\ell - \varepsilon, \ell)$

Нека $a_n \in (\ell - \varepsilon ; \ell)$ или $\ell - \varepsilon < a_n < \ell$

Точна горна - най-малката отгоре

Точна долна - най-голямото отдолу

Принцип на Кантo

$\Delta_0 = [a, b]$, $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, $\Delta_n = [a_n, b_n]$

$\Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \dots \supseteq \Delta_n \supseteq \dots$

дължината на $\Delta_n = b_n - a_n \to 0$

ζ - дета ; η - тета ; ξ - кси-та

$$\{\zeta\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n \;/\; \zeta \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \quad \text{- има 1 точка}$$

системата на Кантo



$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \to a$
$b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n \to b$

$b_n - a_n \to 0$
$\|\quad\quad\|$
$b - a = 0$ или $b = a$

сегментите се свиват към 1 точка

Т на Болцано - Вайерщрас

Всяко безкрайно ограничено множество има поне 1 точка на сгъстяване

A - ограничено отгоре и отдолу $|a \le x \le b|$,

$\Delta = [a, b] \Rightarrow l = b - a$



$\Delta_1 = [a_1, b_1]$ дължината $l_1 = l/2$
$\Delta_2 = [a_2, b_2]$ дължината $l_2 = l/2^2$

$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \ldots \supseteq \Delta_n \supseteq \ldots$

$\lim_{n\to\infty} q^n \to 0$; $0<q<1$; тогава $q^n = p$

$$q^{n+1} = q^n q = pq \Rightarrow p(1-q) = 0$$

Нека имаме множество е редица

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$

a - точка на сгъстяване

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \dots > \varepsilon_n \to 0$

$a_{n_1} \in (a-\varepsilon_1; a+\varepsilon_1)$



точка на сгъстяване

$a_{n_2} \in (a-\varepsilon_2; a+\varepsilon_2)$

$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots a_{n_k} \longrightarrow a$

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ε_k ; $k > N$ тогава

$$(a-\varepsilon_k, a+\varepsilon_k) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Всяка ограничена редица има сходяща подредица

Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ньютона бином

$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\tfrac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\tfrac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1}\left(\tfrac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$a_n = 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(1-\tfrac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{k+1}{n}\right)$$

при $n+1$

$$a_{n+1} = \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\tfrac{2}{n+1}\right) \ldots \tfrac{1}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\tfrac{2}{n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \quad \text{т.е.} \quad 2 < a_n < a_{n+1}$$

оценка на a_{n+1} отгоре

$$a_n \leq 2 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n! \leq$$

$$\leq 2 + 1/2 + 1/2^2 + \ldots + 1/2^n \Rightarrow$$

$$a_n \leq 2 + 1/2\left(1 + 1/2 + 1/2^{n-1}\right) = 2 + 1/2 \cdot \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2}$$

$1/2^n = 0$

$$a_n \leq 2 + 1 \leq 3 \text{ или } 2 < a_n < 3$$

Границата e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$$

непериодично число

$$\boxed{2 < e < 3}$$ непериодично число

Критерий на Коши за сходимост на редица

За да кажем че една редица е сходяща $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, е необходимо за всяко $\varepsilon > 0$, съществува такова N така че

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad \text{при } n > N$$

Трябва да докажем

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

$$|a_{n+p} - a_n| < |a_{n+p} - a + a - a_n| <$$

$$|a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при $\varepsilon > 0$ и такова N че $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

и $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon > |a_{n+p} - a| + |a - a_n|$

$$n > N \Rightarrow n+p > N$$

Нека

$\varepsilon > 0$, N така че $n > N$

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

$n_0 > N$ тогава $|a_{n_0+p} - a_{n_0}| < \varepsilon$

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_{n_0+p} < a_{n_0} + \varepsilon$$

a_{n_0+p} – ограничено

Сходяща подредица

$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} \ldots a_{n_k} \to a$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| = |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$$

Избираме такава N, така че

$$n_k > N \,,\; n > N \;\text{и}$$

$$\left.\begin{aligned} |a_n - a_{n_k}| &= \varepsilon/2 \\ |a_{n_k} - a| &= \varepsilon/2 \end{aligned}\right\} |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \Big| \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$S_1, S_2, S_3 \dots S_n \longrightarrow$ сходяща

По Коши

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \quad ; n > N \quad \text{или}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

Ако редът от абсолютната стойност е сходящ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$